

DOI: 10.20189/j.cnki.CN/61-1527/E.202502011

基于线弹性动力学法的仿人咀嚼机器人 弹动力学性能分析

程 晨, 袁晓静, 曾繁琦, 王友才, 罗伟蓬, 刘 建
(火箭军工程大学, 陕西 西安 710025)

摘 要: 为掌握由 6 条主动旋转副-被动球副-被动球副 (Revolute-Spherical-Spherical, RSS) 并联构成的仿人咀嚼机器人的弹动力学特性, 使用线弹性动力学方法建立了机构整体的弹性动力学模型, 并通过基于梯形法则步长和向后差分算法对其形变和自然频率进行了数值计算。首先, 根据 6RSS 并联机构的特点作出 4 个基本假设, 在此基础上分别建立曲柄、连杆和末端执行器的动力学模型; 然后, 根据不同部件连接处节点的变形协调条件, 建立相互独立的广义坐标; 最后, 通过装配所有连杆和末端执行器的模型, 得到整体咀嚼机器人机构的线弹性动力学模型。在跟踪给定的咀嚼轨迹过程中, 分别求得有、无咀嚼反力时末端执行器的形变及整机的自然频率。结果表明: 尽管机构的形变量在有咀嚼反力时比无咀嚼反力时要更大, 但在 6 个运动方向上的最大形变量分别为 0.017 0 mm、0.001 1 mm、0.028 0 mm、 $7.1 \times 10^{-6}^\circ$ 、 $4.9 \times 10^{-4}^\circ$ 、 $7.0 \times 10^{-6}^\circ$, 各数值均较小; 同时, 机构整体的最小自然频率为 300 Hz, 远超人的咀嚼频率, 表明所设计的咀嚼机器人有较好的弹动力学性能。

关键词: 咀嚼机器人; 并联机构; 线弹性动力学法; 弹动力学性能

中图分类号: TP242

文献标志码: A

文章编号: 2097-2741(2025)02-102-11

Linear Elastodynamic Method-based Elastodynamic Performance Analysis of a Humannoid Masticatory Robot

CHENG Chen, YUAN Xiaojing, ZENG Fanqi, WANG Youcai,
LUO Weipeng, LIU Jian
(Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

ABSTRACT: To understand the elastodynamic characteristics of a parallel humanoid masticatory robot with 6RSS (Revolute-Spherical-Spherical) chains, a linear elastodynamic method was applied to establish an overall elastodynamic model of the mechanism. Numerical calculations were performed on the deformation and natural frequency based on the trapezoidal rule size and backward difference algorithm. First, four basic assumptions were made based on the characteristics of the 6RSS parallel mechanism, and dynamic models of the cranks, couplers, and end effectors

收稿日期: 2024-10-08

第一作者: 程晨 (1986—), 男, 讲师, 主要从事仿生机器人研究。E-mail: 731218791@qq.com

引用格式: 程晨, 袁晓静, 曾繁琦, 等. 基于线弹性动力学法的仿人咀嚼机器人弹动力学性能分析[J]. 火箭军工程大学学报, 2025, 39 (2): 102-112. CHENG Chen, YUAN Xiaojing, ZENG Fanqi, et al. Linear elastodynamic method-based elastodynamic performance analysis of a humannoid masticatory robot[J]. Journal of Rocket Force University of Engineering, 2025, 39 (2): 102-112.

were constructed on this basis, respectively. Subsequently, independent generalized coordinates were established according to the deformation coordinates of the nodes at different component connections. Finally, a linear elastodynamic model of the overall masticatory robot mechanism was developed by assembling the models of all the linkages and end effectors. During the process of tracking a given masticatory trajectory, the deformation of the end effector and the natural frequency of the entire machine with and without chewing reaction forces were computed, respectively. The results show that although the deformation of the entire machine is larger with the chewing reaction forces than without the forces, the maximum deformations in the six directions are only 0.017 0 mm, 0.001 1 mm, 0.028 0 mm, 7.1×10^{-6} , 4.9×10^{-4} , 7.0×10^{-6} , all of which are small. In addition, the minimum natural frequency is 300 Hz, far exceeding the chewing frequency of humans, which indicates that the masticatory robot has good elastodynamic performance.

KEYWORDS: masticatory robot; parallel mechanism; linear elastodynamic method; elastodynamic performance

从机构学的角度来看, 人体咀嚼系统是一个典型的并联机构, 因为咀嚼肌肉是通过并行地共同驱动下颚运动来完成牙齿对食物的撕咬、切断和研磨, 以便进一步吞咽^[1]。相关研究人员对此开展了大量工作并致力于开发仿人咀嚼机器人, 用于研究咀嚼系统生物力学、测试食品特性等。例如, Chow 等^[2]使用人的表面咀嚼肌电信号和咀嚼机器人来对颞下颌关节作用力进行测量; Chen 等^[3]开展了仿人咀嚼机器人的运动学和模糊控制研究, 用于定量分析食品特性; Mostashiri 等^[4]对咀嚼机器人的驱动力进行了优化, 以实现咀嚼时关节约束力最小化的目的; Chen 等^[5]设计了一种三自由度杆件式咀嚼机器人, 用其再现人咀嚼力并测试咀嚼食品颗粒; Wen 等^[6-7]使用单位统一的 Jacobian 矩阵, 用于咀嚼机器人的优化设计, 并研发了一种新式线驱动直线作动器来模仿咀嚼肌产生的张力。本文受到咀嚼系统生物结构的启发, 设计了一种内核为六自由度并联机构的仿人咀嚼机器人。该机构通过由 6 条主动旋转副-被动球副-被动球副 (Revolute-Spherical-Spherical, RSS) 构成的支链来模拟咀嚼系统中最重要的 6 块肌肉, 从而来并行驱动末端执行器, 即下颚。该咀嚼机器人主要用于食品行业模拟人咀嚼行为, 助力于开发和测试新食材的咀嚼性能^[8], 以克服当前主要测试设备只能进行简单的一维冲压而导致食品材质测试不准确的弊端。

文献[8-9]均假设咀嚼机器人的本体为刚体, 并对机构的刚性运动学和动力学逆解进行了分析, 包括使用微分运动学法得到主动关节位移、速度、

加速度和末端执行器运动之间的函数方程以及使用牛顿-欧拉法则获得驱动力矩及被动关节约束力与末端执行器运动之间的函数方程, 同时计算得到了机构在跟踪给定轨迹时上述变量的具体数值。而在机器人的实际使用过程中, 构件大范围的刚性运动和弹性形变并存, 刚性运动产生的惯性力、离心力和科氏力会引发构件发生弹性形变, 而弹性形变则会降低刚性运动的精度和稳定性。同时, 咀嚼机器人在对研发的新食品进行仿人咀嚼过程中, 不可避免会因为自身惯性力和咀嚼反力而产生形变。针对上述弹性动力学问题, 目前常用的求解方法主要有线弹性动力学法^[10]和浮动参考坐标系法^[11]。线弹性动力学法只考虑刚性运动对弹性形变的影响, 不计后者对前者的影响以及两者的耦合作用, 主要适用于零件刚度较大、机构运动速度较慢的情况。例如, Alessandro 等^[12]通过线弹性动力学法对含有 3 个平动自由度和 1 个转动自由度的并联机构的弹动力学性能进行了优化; Song 等^[13]利用线弹性动力学方法建立了二自由度旋转并联机构的弹动力学模型, 并使用三维 Euler-Bernoulli 梁单元描述杆件的柔性, 分析了机构的自然频率; Sun 等^[14]在一种五自由度并联机构的设计阶段中, 为使其振动和形变达到最小, 在所建立的线弹性动力学模型中优化分析了几何误差影响, 并通过有限元法和实验, 验证了数学模型的正确性; Wu 等^[15]通过 KED 法分析了一个平面二自由度并联机构中的关键结构参数对频率和敏感度的影响, 以确定机械设计中的关键参数值。然而, 当机构运动速度较大且杆件刚度较小时,

利用线弹性动力学方法建立的模型在精确度方面表现较差。相比之下,浮动参考坐标系法能够准确描述构件刚柔运动之间的相互影响,模型虽然复杂,但计算精度得到显著提升。因此,浮动参考坐标系法通常用于建立一些构型较为简单的多体系统和平面并联机构的刚柔耦合模型,如平面 3-PRR 机构^[16]、平面 Lambda 并联机构^[17]和含 2 个平行四边形连杆的并联机构^[18-19]等。但由于模型的复杂性,至今还未将其应用在空间并联机构的建模中。除此之外,还有一些其他用于分析机构弹动力学特性的方法,如 Ma 等^[20]提出一种基于运动学模型和计算机辅助分析软件的建模方法,但该方法对辅助软件的使用要求较高;Zhu 等^[21]使用传递矩阵法求解 Stewart 机构的振动特性,通过高阶系数矩阵求解自然频率,导致其计算量增加,因而只能获得机构在单个位姿时的振动特性;Stabile 等^[22]使用牛顿-欧拉法则分析了 Stewart 平台边界条件对隔振性能的影响;Yu 等^[23]使用结构动力学方法建立了并联机床的动力学模型,并对其频率响应进行了分析;Zbyněk 等^[24]使用拉格朗日方程建立了 Stewart 平台的动力学模型,并将其应用在设计具有相同特征频率的构型中;Berendsen 等^[25]使用拉格朗日方程建立了含柔性关节的平面 3RRR 并联机构动力学模型。

综上所述,本文在机器人刚性运动学和动力学的基础上,考虑到咀嚼机器人在实际使用过程中的运动速度较低、咀嚼力较小,且考虑到机器人闭环较多,构型较为复杂,选用浮动参考坐标系法会不可避免地增加计算量,对计算机性能要求高,因此使用线弹性动力学方法建立了 6RSS 仿人咀嚼并联机器人的弹性动力学模型,既保证了其具有较好的准确度,又能避免繁重的计算过程。在计入人咀嚼反力的情况下,通过数值计算,探索了咀嚼机器人的弹性形变、自然频率等动力学特性,并分析了咀嚼反力对弹性形变大小的影响。

1 动力学模型

1.1 机构描述

本文研究对象是以人体咀嚼系统为基础设计的 6RSS 并联机构,由固定基座、6 条 RSS 并联支链和可运动末端执行器构成,共包含 6 个主动旋转关节和 6 个自由度,结构如图 1 所示。为清晰地显示其可运动部分,固定于基座的上颚未在图中显

示。其中,惯性坐标系 $\{S\}$ 固定于基座上,原点为 O_s ,包含正交的 x_s 轴和 y_s 轴, z_s 轴垂直于 x_s 轴和 y_s 轴构成的水平面。运动下颚(即末端执行器)通过 6 条独立运动支链与基座相连,每条支链包含 3 个部分,分别为固定于基座上的旋转作动器、曲柄以及连杆。旋转作动器的驱动轴在 G_i 点与曲柄 $G_iS_i(i=1, 2, \dots, 6)$ 相连,连杆 S_iQ_i 分别在端点 S_i 和 Q_i 通过球关节与曲柄和下颚相连接。第 i 个作动器相对于 $\{S\}$ 系的旋转可以通过固定于点 G_i 的作动器坐标系 $\{C_i\}$ 描述,在 $\{C_i\}$ 系中, x_{C_i} 轴由点 G_i 指向点 S_i , z_{C_i} 轴穿过作动器的驱动轴轴心, x_{C_i} 轴、 y_{C_i} 轴和 z_{C_i} 轴遵守右手准则。连杆坐标系 $\{N_i\}$ 位于 S_iQ_i 的质心 E_i 处,其中, x_{N_i} 轴由点 S_i 指向点 Q_i , y_{N_i} 轴由 x_{N_i} 轴和 x_s 轴叉乘得到, x_{N_i} 轴、 y_{N_i} 轴和 z_{N_i} 轴同样遵守右手准则。对于连杆 S_iQ_i ,可在三维空间的 3 个方向上进行平动和转动。末端执行器坐标系 $\{M\}$ 位于其质心 O_M 处,通过 O_M 相对 O_s 的位置,可表示其 3 个平动自由度 X 、 Y 、 Z ,其 3 个转动自由度用 xyz 形式的欧拉角来表达,即 α 、 β 、 γ 分别为末端执行器绕 $\{M\}$ 系 x_M 轴、 y_M 轴、 z_M 轴的转动角度。

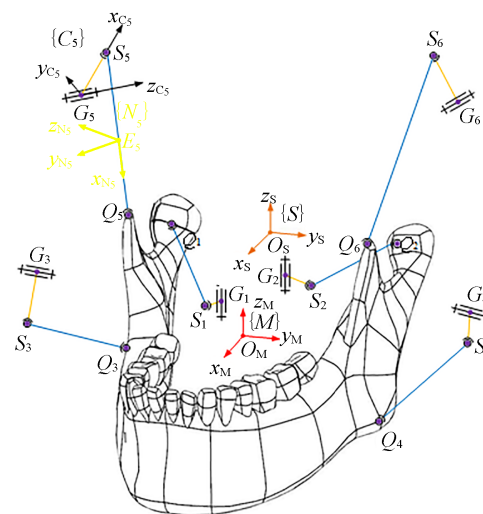


图 1 仿人咀嚼系统的 6RSS 并联机构^[8]

Fig. 1 6RSS parallel mechanism of humanoid masticatory system^[8]

1.2 基本假设

在使用线弹性动力学法对仿人咀嚼机器人的 6RSS 并联机构建立弹性动力学模型之前,做出如下假设。

1) 末端执行器的刚度和质量要比连杆、曲柄等运动部件大得多,因而可以将其整体假设成为

刚体。

2) 6 条连杆 $S_i Q_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 假设为具有相同横截面积的空间 Euler-Bernoulli 梁。在使用有限元法建立的动力学模型中, 分别用 3 次、1 次、1 次多项式表示节点的径向、轴向和扭转形变。

3) 虽然末端执行器为刚体, 其自身不产生形变, 但因连杆的变形同样会使末端执行器产生微小振动, 这种振动位移属于在大范围刚性运动上叠加的微小量。使用线弹性动力学方法只考虑刚性运动对振动和形变的影响, 而不考虑振动和形变对刚性运动的影响以及两者之间的耦合效应。

4) 曲柄固接于驱动电机的旋转输出轴, 两者总的转动惯量和刚度都比连杆要大得多, 所以将曲柄假设为固定基座, 不产生弹性形变和振动。

1.3 梁单元动力学建模

本文将第 i 条连杆 $S_i Q_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 等分为 3 个 Euler-Bernoulli 梁单元 $S_i H_i$ 、 $H_i L_i$ 和 $L_i Q_i$, 每个节点 S_i 、 H_i 、 L_i 和 Q_i 沿着各自节点坐标系上的轴分别有 3 个平动和 3 个转动弹性位移, 如图 2 所示。每个单元的动力学模型为^[26]

$$\bar{\mathbf{M}}_E \cdot \ddot{\Delta}_E + \bar{\mathbf{K}}_E \cdot \Delta_E = \bar{\mathbf{F}}_E - \bar{\mathbf{M}}_E \cdot \ddot{\Delta}_{rE} \quad (1)$$

式中: $\bar{\mathbf{M}}_E$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_E$ 、 Δ_E 分别为梁单元的质量矩阵、刚度矩阵和节点的弹性位移向量, 维度分别为 12×12 、 12×12 、 12×1 ; $\ddot{\Delta}_E$ 为弹性位移向量 Δ_E 对时间 t 的二阶导数; $\bar{\mathbf{F}}_E$ 为大小为 12×1 的广义力向量, 由单元自身惯性力及外力之和组成, 对应于 Δ_E 的每个变量; $\ddot{\Delta}_{rE}$ 为在刚性运动学中求得的 2 个节点处的加速度向量。该式中所有变量都是在连杆坐标系 $\{N_i\}$ 中进行表达的。

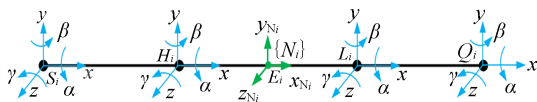


图 2 第 i 条连杆中的 3 个梁单元及其坐标系

Fig. 2 Three beam elements and their coordinate system of the i -th coupler

为得到最终的动力学模型, 需要将不同运动部件的动力学模型统一在惯性坐标系 $\{S\}$ 中进行表示。每个梁单元的节点弹性位移向量 U 在 $\{S\}$ 系中可表示为

$$U = {}^S_N T \cdot \Delta_E \quad (2)$$

式中: ${}^S_N T = \text{diag}({}^S_{N_i} R, {}^S_{N_i} R, {}^S_{N_i} R, {}^S_{N_i} R)$, ${}^S_{N_i} R$ 是从 $\{S\}$ 系到 $\{N_i\}$ 系的旋转变换矩阵。从而有

$$\Delta_E = {}^S_{N_i} T^T \cdot U \quad (3)$$

类似地, 可得

$$\Delta_{rE} = {}^S_{N_i} T^T \cdot U_r \quad (4)$$

式中: U_r 为每个梁单元的 2 个节点处通过刚性运动学求得的位移向量, 大小为 12×1 。将式 (3) 和 (4) 代入式 (1) 可得

$$\bar{\mathbf{M}}_E \cdot {}^S_{N_i} T^T \cdot \ddot{U} + \bar{\mathbf{K}}_E \cdot {}^S_{N_i} T^T \cdot U = \bar{\mathbf{F}}_E - \bar{\mathbf{M}}_E \cdot {}^S_{N_i} T^T \cdot \ddot{U}_r \quad (5)$$

等号两边同时左乘 ${}^S_{N_i} T$ 可得

$$\hat{\mathbf{M}}_{E_i} \cdot \ddot{U} + \hat{\mathbf{K}}_{E_i} \cdot U = \hat{\mathbf{F}}_{E_i} - \hat{\mathbf{M}}_{E_i} \cdot \ddot{U}_r \quad (6)$$

其中,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}_{E_i} = {}^S_{N_i} T \cdot \bar{\mathbf{M}}_E \cdot {}^S_{N_i} T^T \\ \hat{\mathbf{K}}_{E_i} = {}^S_{N_i} T \cdot \bar{\mathbf{K}}_E \cdot {}^S_{N_i} T^T \\ \hat{\mathbf{F}}_{E_i} = {}^S_{N_i} T \cdot \bar{\mathbf{F}}_E \end{cases} \quad (7)$$

式 (6) 可用于连杆的任意 1 个梁单元, 3 个梁单元在 $\{S\}$ 系中的动力学模型为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}_{S_i H_i} \cdot \ddot{U}_{S_i H_i} + \hat{\mathbf{K}}_{S_i H_i} \cdot U_{S_i H_i} = \hat{\mathbf{F}}_{S_i H_i} - \hat{\mathbf{M}}_{S_i H_i} \cdot \ddot{U}_{rS_i H_i} \\ \hat{\mathbf{M}}_{H_i L_i} \cdot \ddot{U}_{H_i L_i} + \hat{\mathbf{K}}_{H_i L_i} \cdot U_{H_i L_i} = \hat{\mathbf{F}}_{H_i L_i} - \hat{\mathbf{M}}_{H_i L_i} \cdot \ddot{U}_{rH_i L_i} \\ \hat{\mathbf{M}}_{L_i Q_i} \cdot \ddot{U}_{L_i Q_i} + \hat{\mathbf{K}}_{L_i Q_i} \cdot U_{L_i Q_i} = \hat{\mathbf{F}}_{L_i Q_i} - \hat{\mathbf{M}}_{L_i Q_i} \cdot \ddot{U}_{rL_i Q_i} \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\hat{\mathbf{F}}_{S_i H_i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{S_i} \\ \hat{\mathbf{F}}_{H_i} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{F}}_{H_i L_i} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{F}}_{H_i} \\ \hat{\mathbf{F}}_{L_i} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{F}}_{L_i Q_i} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{F}}_{L_i} \\ \hat{\mathbf{F}}_{Q_i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: $\hat{\mathbf{F}}_{S_i}$ 、 $\hat{\mathbf{F}}_{H_i}$ 、 $\hat{\mathbf{F}}_{L_i}$ 和 $\hat{\mathbf{F}}_{Q_i}$ 分别为作用在节点 S_i 、 H_i 、 L_i 和 Q_i 的惯性力螺旋和外力螺旋之和, 且都在 $\{S\}$ 系中进行表达。因为 H_i 和 L_i 为中间节点, 作用在 2 个相连单元上的力螺旋大小相等方向相反, 所以在 $\hat{\mathbf{F}}_{H_i L_i}$ 和 $\hat{\mathbf{F}}_{L_i Q_i}$ 中有 2 个负号。进一步细化, 式 (9) 可写为

$$\hat{\mathbf{F}}_{S_i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{S_i}^1 \\ \hat{\mathbf{F}}_{S_i}^2 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{F}}_{H_i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{H_i}^1 \\ \hat{\mathbf{F}}_{H_i}^2 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{F}}_{L_i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{L_i}^1 \\ \hat{\mathbf{F}}_{L_i}^2 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{F}}_{Q_i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{Q_i}^1 \\ \hat{\mathbf{F}}_{Q_i}^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: $\hat{\mathbf{F}}_{S_i}^1$ 、 $\hat{\mathbf{F}}_{S_i}^2$ 分别为作用在节点 S_i 处的惯性力及外力之和以及惯性力矩及外力矩之和, 其他项符号含义与之类似。

为便于计算, 定义一个大小为 24×1 的向量

$$U_{SHLQ_i} = \begin{bmatrix} U_{S_i} \\ U_{H_i} \\ U_{L_i} \\ U_{Q_i} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: 4 个分量分别为节点 S_i 、 H_i 、 L_i 和 Q_i 的弹性

位移向量, 大小均为 6×1 , 因此可得

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{S_i H_i} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{U}_{SHLQ_i} \\ \mathbf{U}_{H_i L_i} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{U}_{SHLQ_i} \\ \mathbf{U}_{L_i Q_i} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{U}_{SHLQ_i} \end{cases} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = [\mathbf{E}_{12 \times 12} & \mathbf{0}_{12 \times 12}] \\ \mathbf{A}_2 = [\mathbf{0}_{12 \times 6} & \mathbf{E}_{12 \times 12} & \mathbf{0}_{12 \times 6}] \\ \mathbf{A}_3 = [\mathbf{0}_{12 \times 12} & \mathbf{E}_{12 \times 12}] \end{cases} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ 、 $\mathbf{A}_3$ 为布尔矩阵, 用于连接每个梁单元的 2 个节点到整体连杆的 4 个节点, 代入式 (8) 可得

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{S_i H_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{SHLQ_i} + \mathbf{K}_{S_i H_i} \cdot \mathbf{U}_{SHLQ_i} = \mathbf{A}_1^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{S_i H_i} - \mathbf{M}_{S_i H_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{rSHLQ_i} \\ \mathbf{M}_{H_i L_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{SHLQ_i} + \mathbf{K}_{H_i L_i} \cdot \mathbf{U}_{SHLQ_i} = \mathbf{A}_2^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{H_i L_i} - \mathbf{M}_{H_i L_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{rSHLQ_i} \\ \mathbf{M}_{L_i Q_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{SHLQ_i} + \mathbf{K}_{L_i Q_i} \cdot \mathbf{U}_{SHLQ_i} = \mathbf{A}_3^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{L_i Q_i} - \mathbf{M}_{L_i Q_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{rSHLQ_i} \end{cases} \quad (14)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{S_i H_i} = \mathbf{A}_1^T \cdot \hat{\mathbf{M}}_{S_i H_i} \cdot \mathbf{A}_1, \mathbf{K}_{S_i H_i} = \mathbf{A}_1^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{S_i H_i} \cdot \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{M}_{H_i L_i} = \mathbf{A}_2^T \cdot \hat{\mathbf{M}}_{H_i L_i} \cdot \mathbf{A}_2, \mathbf{K}_{H_i L_i} = \mathbf{A}_2^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{H_i L_i} \cdot \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{M}_{L_i Q_i} = \mathbf{A}_3^T \cdot \hat{\mathbf{M}}_{L_i Q_i} \cdot \mathbf{A}_3, \mathbf{K}_{L_i Q_i} = \mathbf{A}_3^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{L_i Q_i} \cdot \mathbf{A}_3 \end{cases} \quad (15)$$

将式 (14) 中的 3 个方程等号左右两边分别相加可得

$$\mathbf{M}_{SHLQ_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{SHLQ_i} + \mathbf{K}_{SHLQ_i} \cdot \mathbf{U}_{SHLQ_i} = \mathbf{F}_{SHLQ_i} - \mathbf{M}_{SHLQ_i} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{rSHLQ_i} \quad (16)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{SHLQ_i} = \mathbf{M}_{S_i H_i} + \mathbf{M}_{H_i L_i} + \mathbf{M}_{L_i Q_i} \\ \mathbf{K}_{SHLQ_i} = \mathbf{K}_{S_i H_i} + \mathbf{K}_{H_i L_i} + \mathbf{K}_{L_i Q_i} \end{cases} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{M}_{SHLQ_i}$ 和 $\mathbf{K}_{SHLQ_i}$ 分别为连杆 $S_i Q_i$ 的质量矩阵和刚度矩阵。两端 S_i 和 Q_i 为球关节所在节点, 若不计摩擦, 在此两处只有 3×1 约束力向量存在, 即 $\hat{\mathbf{F}}_{S_i}^2 = \hat{\mathbf{F}}_{Q_i}^2 = \mathbf{0}_{3 \times 1}$, 则

$$\mathbf{F}_{SHLQ_i} = \mathbf{A}_1^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{S_i H_i} + \mathbf{A}_2^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{H_i L_i} + \mathbf{A}_3^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{L_i Q_i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{S_i}^1 \\ \mathbf{0}_{15 \times 1} \\ \hat{\mathbf{F}}_{Q_i}^1 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中: $\mathbf{F}_{SHLQ_i}$ 是由纯惯性力和外力之和构成的广义力向量。

1.4 末端执行器的振动模型

在 1.2 节中, 虽然假设末端执行器为刚体, 自身不产生形变, 但因连杆变形会导致末端执行器

产生微小刚性振动。设末端执行器质心 O_M 的平动振动向量和末端执行器的转动振动向量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_T &= [U_x \ U_y \ U_z]^T \\ \mathbf{U}_R &= [U_\alpha \ U_\beta \ U_\gamma]^T \end{aligned} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{U}_T$ 的 3 个元素分别为质心 O_M 沿 $\{S\}$ 坐标系 3 个轴上的平动振动位移; $\mathbf{U}_R$ 的 3 个元素分别为末端执行器沿着刚性运动的 3 个欧拉角的振动转动角度。 $\mathbf{U}_T$ 和 $\mathbf{U}_R$ 共同构成大小为 6×1 维的振动向量 $\mathbf{U}_{EE} = [\mathbf{U}_T \ \mathbf{U}_R]^T$, 用于描述末端执行器的振动。与刚性大范围运动位移相比, 振动位移要小得多。进一步可以得到因微小转动位移引起的旋转变换矩阵为

$$\mathbf{R}_\Delta \approx \mathbf{R}_x(U_\alpha) \cdot \mathbf{R}_y(U_\beta) \cdot \mathbf{R}_z(U_\gamma) = (\mathbf{U}_R \times) + \mathbf{E}_3 \quad (20)$$

式中: $\mathbf{R}_x(U_\alpha)$, $\mathbf{R}_y(U_\beta)$, $\mathbf{R}_z(U_\gamma)$ 分别表示绕 x 轴, y 轴和 z 轴的旋转变换矩阵, 转动角度分别为 U_α , U_β , U_γ ; 符号 $\times$ 表示将大小为 3×1 的列向量展开为 3×3 维度的螺旋对称矩阵。

末端执行器质心 O_M 的速度螺旋为

$$\bar{\mathbf{t}}_{EE} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{O_M} \\ \boldsymbol{\omega}_{EE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_T \\ \dot{\mathbf{U}}_R \end{bmatrix} = \mathbf{M}_a \cdot \dot{\mathbf{X}}_{EE} + \dot{\mathbf{U}}_{EE} \quad (21)$$

式中: $\mathbf{V}_{O_M}$ 为末端执行器质心 O_M 的线速度; $\boldsymbol{\omega}_{EE}$ 为末端执行器的转动速度; $\dot{\mathbf{U}}_T$ 和 $\dot{\mathbf{U}}_R$ 分别为末端执行器平动和转动的振动速度, 即 $\mathbf{U}_T$ 和 $\mathbf{U}_R$ 对时间的一阶导数; $\mathbf{X}_{EE} = [X \ Y \ Z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$, $\dot{\mathbf{X}}_{EE}$ 为其对时间的一阶导数; $\mathbf{M}_a$ 是将 $\dot{\mathbf{X}}_{EE}$ 映射到末端执行器速度旋量的系数矩阵。因此, 可得末端执行器的动能为

$$K_{EE} = \frac{1}{2} \cdot \bar{\mathbf{t}}_{EE}^T \cdot \mathbf{M}_{EE} \cdot \bar{\mathbf{t}}_{EE} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{M}_{EE} = \text{diag}(m_{EE} \cdot \mathbf{E}_{3 \times 3} \ \mathbf{I}_{EE})$ 为二元惯性矩阵; m_{EE} 为末端执行器的质量; $\mathbf{I}_{EE}$ 为末端执行器围绕质心的转动惯量。将式 (21) 代入式 (22) 中可得

$$\begin{aligned} K_{EE} &= \mathbf{K}_{EE1}^C + \mathbf{K}_{EE2}^C \cdot \dot{\mathbf{U}}_{EE} + \dot{\mathbf{U}}_{EE}^T \cdot \mathbf{K}_{EE3}^C \cdot \dot{\mathbf{U}}_{EE} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\dot{\mathbf{X}}_{EE}^T \cdot \mathbf{M}_a^T \cdot \mathbf{M}_{EE} \cdot \mathbf{M}_a \cdot \dot{\mathbf{X}}_{EE} + 2 \cdot \dot{\mathbf{X}}_{EE}^T \cdot \mathbf{M}_a^T \cdot \mathbf{M}_{EE} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{EE} + \dot{\mathbf{U}}_{EE}^T \cdot \mathbf{M}_{EE} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{EE}) \end{aligned} \quad (23)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{EE1}^C = \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{X}}_{EE}^T \cdot \mathbf{M}_a^T \cdot \mathbf{M}_{EE} \cdot \mathbf{M}_a \cdot \dot{\mathbf{X}}_{EE} \\ \mathbf{K}_{EE2}^C = \dot{\mathbf{X}}_{EE}^T \cdot \mathbf{M}_a^T \cdot \mathbf{M}_{EE} \\ \mathbf{K}_{EE3}^C = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M}_{EE} \end{cases} \quad (24)$$

因为刚性运动位移量远大于其振动位移量, 在计算末端执行器势能时, 为简化计算, 不考虑振动变量的影响, 即

$$P_{EE} = m_{EE} \cdot g \cdot Z_{EE} \quad (25)$$

式中: P_{EE} 为末端执行器的势能; g 为重力加速度, 取值为 9.8 m/s^2 ; Z_{EE} 为末端执行器质心在 z_s 轴上的坐标。进一步可得末端执行器的拉氏函数为

$$L_{EE} = K_{EE} - P_{EE} \quad (26)$$

由此可推导拉氏方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{EE}}{\partial \dot{U}_{EE}} \right) - \frac{\partial L_{EE}}{\partial U_{EE}} = M_{EE} \cdot \ddot{U}_{EE} + (K_{EE}^C)^T = F_{EE} \quad (27)$$

式中: F_{EE} 为 6×1 维度的广义力向量。

1.5 变形协调条件

柔性连杆 $S_i Q_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 分别通过 2 个节点 S_i 和 Q_i 与曲柄及末端执行器相连, 因此需要加入变形协调条件以确保不同零件在连接节点处的位移保持一致。从 1.2 节的假设可知, 因为将曲柄假定为固定基座, 所以 $U_{S_i} = \mathbf{0}_{6 \times 1}$ 。而连杆与末端执行器的变形协调条件推导如下: 在 6 条连杆形变的共同作用下, 末端执行器在每个时间间隔的起始及最终时刻, 其上的坐标系从 $\{M_1\}$ 系转换到 $\{M_2\}$ 系所需的旋转变换矩阵 ${}^{M_1}_{M_2}R = R_\Delta$ 已在式(20)中求得, 因此进一步可得 4×4 维的一致变换矩阵为

$${}^{M_1}_{M_2}T = \begin{bmatrix} {}^{M_1}_{M_2}R & U_T \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

所以从 $\{S\}$ 系到 $\{M_2\}$ 系的一致变换矩阵为

$${}^{S}_{M_2}T = {}^{S}_{M_1}T \cdot {}^{M_1}_{M_2}T \quad (29)$$

末端执行器上的节点 $Q_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 在 $\{M_1\}$ 系和 $\{M_2\}$ 系中分别记作 $Q_{i,1}$ 和 $Q_{i,2}$ 。 $\{M_2\}$ 系中的 $Q_{i,2}$ 在 $\{S\}$ 系中可表示为

$$\begin{bmatrix} O_S Q_{i,2} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{S}_{M_2}T \cdot \begin{bmatrix} O_{M_2} Q_{i,2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中: $O_S Q_{i,2}$ 表示以 O_S 为起点, $Q_{i,2}$ 为终点的向量; $O_{M_2} Q_{i,2}$ 表示以 O_{M_2} 为起点, $Q_{i,2}$ 为终点的向量。将式 (29) 代入式 (30) 可得

$$\begin{bmatrix} O_S Q_{i,2} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{S}_{M_1}T \cdot {}^{M_1}_{M_2}T \cdot \begin{bmatrix} O_{M_2} Q_{i,2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Q_i 点的平动振动可表示为

$$\begin{bmatrix} U_{Q_i,T} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_S Q_{i,2} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O_S Q_{i,1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^S R & O_S O_M \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (U_R \times) \cdot [O_{M_1} Q_{i,1}] + U_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

上述推导之所以成立是因为 $O_{M_2} Q_{i,2} = O_{M_1} Q_{i,1}$ 。

因此进一步可得

$$U_{Q_i,T} = J_{E_i} \cdot U_{EE} \quad (33)$$

式中: $J_{E_i} = {}^S_{M_1}R \cdot [E_{3 \times 3} - (O_{M_1} Q_{i,1}) \times]$ 。式 (33) 即为连杆和末端执行器之间的变形协调条件。从中可看出, Q_i 点的平动振动并非独立变量, 而是末端执行器振动向量的函数。

1.6 整体机构的动力学模型

根据上述推导过程, 定义一个 96×1 维的独立广义坐标向量用于描述整体机构的形变。

$$U = [U_{H_1}^T \quad U_{L_1}^T \quad U_{Q_1,R}^T \quad \cdots \quad U_{H_6}^T \quad U_{L_6}^T \quad U_{Q_6,R}^T \quad U_{EE}^T]^T \quad (34)$$

式中: $U_{Q_i,R}$ 为 3×1 维的列向量, 表示 Q_i 节点的旋转变形。从上述变形协调条件可知, 对每条连杆的节点有

$$U_{SHLM_i} = \begin{bmatrix} U_{S_i} \\ U_{H_i} \\ U_{L_i} \\ U_{Q_i,T} \\ U_{Q_i,R} \end{bmatrix} = P_i \cdot U \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (35)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} E_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 19} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & E_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 13} \\ \mathbf{0}_{6 \times 12} & E_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 7} \\ \mathbf{0}_{3 \times 21} & J_{E_i} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 18} & E_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 96} \\ \mathbf{0}_{6 \times (15(i-1))} & E_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times (90-6 \times (15(i-1)))} \\ \mathbf{0}_{6 \times (6+15(i-1))} & E_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times (90-6 \times (6+15(i-1)))} \\ \mathbf{0}_{3 \times (12+15(i-1))} & E_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times (93-3 \times (12+15(i-1)))} \\ \mathbf{0}_{6 \times 90} & E_{6 \times 6} & \end{bmatrix} \quad (36)$$

对于末端执行器的振动变量有

$$U_{EE} = [\mathbf{0}_{6 \times 90} \quad E_{6 \times 6}] \cdot U = P_7 \cdot U \quad (37)$$

通过上述连杆和末端执行器的动力学模型及变形协调条件, 可得完整的机构线弹性动力学模型为

$$M\ddot{U} + KU = F \quad (38)$$

其中,

$$\begin{cases} M = \sum_{i=1}^6 P_i^T M_{SHLQ_i} P_i + P_7^T M_{EE} P_7 \\ K = \sum_{i=1}^6 P_i^T K_{SHLQ_i} P_i \\ F = \sum_{i=1}^6 P_i^T F_{SHLQ_i} - \sum_{i=1}^6 P_i^T M_{SHLQ_i} \ddot{U}_{iSHLQ_i} + P_7^T F_{EE} \end{cases} \quad (39)$$

式中： $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{F}$ 分别为机构的质量矩阵、刚度矩阵和广义力向量，这些变量都和机构自身惯量、几何参数、位姿、外力等变量紧密相关。

2 数值计算和分析

2.1 振动变量

机器人的振动幅度意味着其所能达到的运动精度，而自然频率与刚度及振动耗能紧密相关，这2个特征能较好地表征机构的线弹性动力学性能，因此本文对这2个变量开展计算和数值分析。如式(38)所示，机构的动力学模型为二阶常微分方程组，具有明显的时变性和非线性，该类方程组一般没有解析解，需要通过数值方法进行计算。Matlab软件根据常微分方程组的特点，提供了多种求解器供用户选择。最初选取基于4阶和5阶龙格-库塔算法的求解器ode45，但发现2个问题：1) $\dot{\mathbf{U}}$ 的值比 $\mathbf{U}$ 大得多，表明方程组刚性较大；2) 计算时间比同等维度的常微分方程组要长得多。为了能高效地求解该类问题，并获得精度较好的计算结果，本文选取专门针对刚性微分方程组的ode23tb求解器对其进行计算，该求解器基于TR-BDF2方法，即在求解的第一、二阶段中，分别使用了梯形法则步长以及向后差分算法。求解器的参数设置如下：Mass项设置方程组中的质量矩阵为式(39)中的质量矩阵 $\mathbf{M}$ ；RelTol项设置相对误差为 10^{-3} ；AbsTol项设置绝对误差为 10^{-6} ；MStateDependence项设置质量矩阵对广义坐标的依赖程度为“strong”；MassSingular项明确表示质量矩阵不是奇异矩阵；odeset命令中其他选项设置为默认情况。连杆参数如下：长度为52 mm；横截面直径为4.7 mm；杨氏弹性模量为207 GPa；剪切模量为80 GPa；密度为 $7.83 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ ；泊松比为0.3。同时，设置曲柄长度为15 mm；绕旋转轴的转动惯量为 $6\,630 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$ 。末端执行器质量为340 g，关于质心的转动惯量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 820\,091.15 & -26.57 & -137\,019.15 \\ -26.57 & 423\,459.18 & -88.6 \\ -137\,019.15 & -88.6 & 818\,784.7 \end{bmatrix}$$

在初始时刻，从 $\{C_i\}$ 和 $\{N_i\}$ ($i=1, 2, \dots, 6$)系到 $\{S\}$ 系的旋转变换矩阵分别为

$${}^S_{C_i}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.854\,1 & 0.520\,1 & 0 \\ -0.520\,1 & 0.854\,1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^S_{C_2}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0.854\,1 & 0.520\,1 & 0 \\ 0.520\,1 & -0.854\,1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ {}^S_{C_3}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0.931\,0 & 0.365\,1 & 0 \\ -0.082\,2 & 0.209\,6 & 0.974\,3 \\ 0.355\,8 & -0.907\,1 & 0.225\,1 \end{bmatrix} \\ {}^S_{C_4}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0.931\,0 & -0.365\,1 & 0 \\ 0.082\,2 & 0.209\,6 & -0.974\,3 \\ 0.355\,8 & 0.907\,1 & 0.225\,1 \end{bmatrix} \\ {}^S_{C_5}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -0.812\,7 & 0.582\,7 & 0 \\ -0.121\,5 & -0.169\,4 & 0.978\,0 \\ 0.569\,9 & 0.794\,8 & 0.208\,5 \end{bmatrix} \\ {}^S_{C_6}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -0.812\,7 & -0.582\,7 & 0 \\ 0.121\,5 & -0.169\,4 & -0.978\,0 \\ 0.569\,9 & -0.794\,8 & 0.208\,5 \end{bmatrix} \\ {}^S_{N_1}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -0.662\,5 & -0.655\,9 & 0.362\,0 \\ -0.697\,5 & 0.363\,7 & -0.617\,4 \\ 0.273\,3 & -0.661\,5 & -0.698\,4 \end{bmatrix} \\ {}^S_{N_2}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -0.663\,1 & 0.362\,3 & -0.655\,0 \\ 0.696\,1 & 0.620\,3 & -0.361\,5 \\ 0.275\,3 & -0.695\,7 & -0.663\,5 \end{bmatrix} \\ {}^S_{N_3}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -0.773\,0 & -0.191\,8 & 0.604\,7 \\ 0.146\,3 & 0.873\,6 & 0.464\,1 \\ -0.617\,3 & 0.447\,2 & 0.647\,2 \end{bmatrix} \\ {}^S_{N_4}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -0.771\,8 & -0.570\,4 & 0.281\,0 \\ -0.144\,7 & 0.587\,9 & 0.795\,9 \\ -0.619\,1 & 0.573\,6 & -0.536\,3 \end{bmatrix} \\ {}^S_{N_5}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0.235\,0 & -0.046\,5 & 0.971\,1 \\ 0.212\,1 & 0.977\,2 & 0.004\,3 \\ 0.944\,8 & 0.207\,0 & 0.238\,5 \end{bmatrix} \\ {}^S_{N_6}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0.234\,8 & 0.373\,6 & -0.897\,4 \\ -0.202\,8 & -0.884\,1 & -0.421\,1 \\ 0.950\,7 & 0.280\,9 & -0.131\,8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

通过文献[9]所述的动力学逆解，求得6个主动关节的驱动力矩如图3所示，以此作为式(38)中的主动广义力。

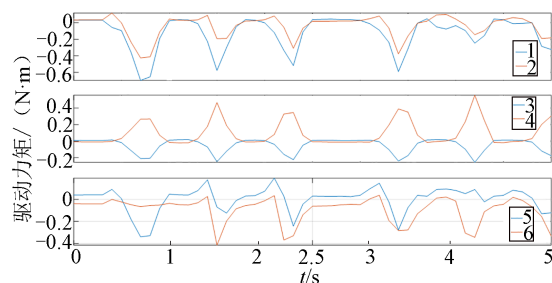


图 3 6个主动关节的驱动力矩
Fig. 3 Driving torques of six active joints

2.2 自然频率

通过式 (38) 中的质量矩阵 $\mathbf{M}$ 和刚度矩阵 $\mathbf{K}$, 可得机构的自然频率为

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (40)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

式中: $\det(\cdot)$ 为计算矩阵行列式的函数; ω 与 f 分别为角速度和自然频率。该变量和质量矩阵及刚度矩阵紧密相关, 而与广义力向量无关, 即自然频率是机构自身特性, 与外力无关。

2.3 数值结果

为求得振动变量和自然频率的数值计算结果, 机构跟踪了口腔健康志愿者持续 10 s 的咀嚼运动轨迹, 如图 4 所示。

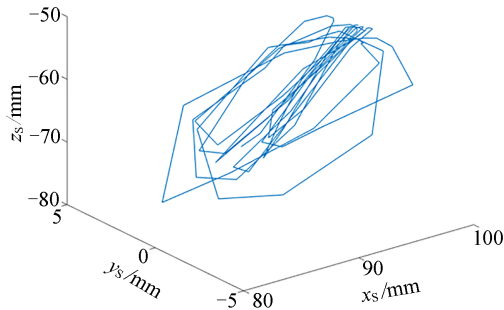


图 4 口腔健康志愿者的下门牙咀嚼运动轨迹^[8]

Fig. 4 Chewing trajectory of the lower incisors of an oral health volunteer^[8]

同时, 为研究外力对振动形变的影响, 在末

端执行器右侧磨牙处施加志愿者咀嚼花生时的反作用力, 如图 5 所示。图例中, $F_{B,x}$ 、 $F_{B,y}$ 和 $F_{B,z}$ 分别表示咀嚼反力在 $\{S\}$ 系 3 个坐标轴上的分量。

通过求解式 (38) 可得, 在有、无咀嚼反力时末端执行器的振动位移如图 6 所示。从图中明显可见, 仅在自身惯性力作用下, 机构的振动变形很小, 几乎可忽略不计, 能将其当作刚体对待。施加外力后, 产生的振动位移幅度明显增大, 但是形变值仍然较小, 表明所设计的机构具有较好的刚度。

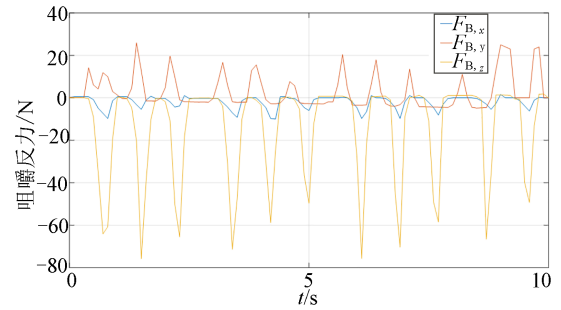


图 5 口腔健康志愿者咀嚼花生时的咀嚼反力

Fig. 5 Chewing reaction forces of an oral health volunteer when chewing peanuts

通过式 (40) 计算机构在跟踪图 4 给定的咀嚼轨迹时, 前六阶自然频率随时间的变化如图 7 所示。

由图 7 (a) ~ (f) 可知, 机构的一阶自然频率数值最小, 从第一阶到第六阶自然频率依次增

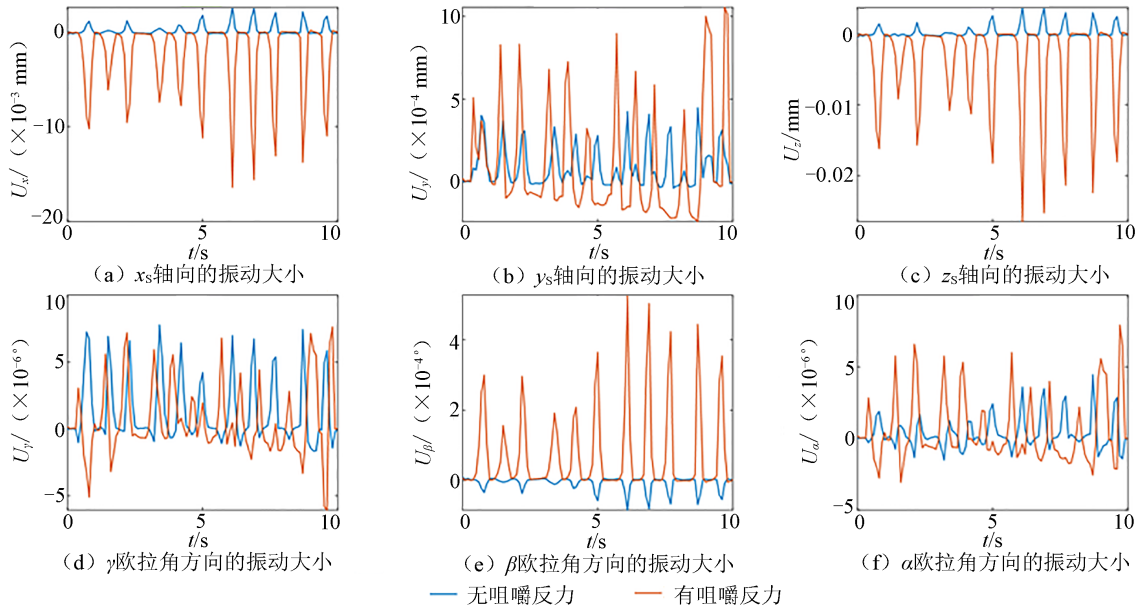


图 6 有、无咀嚼反力时末端执行器的振动位移

Fig. 6 Vibrational displacements of the end effector with and without chewing reaction forces

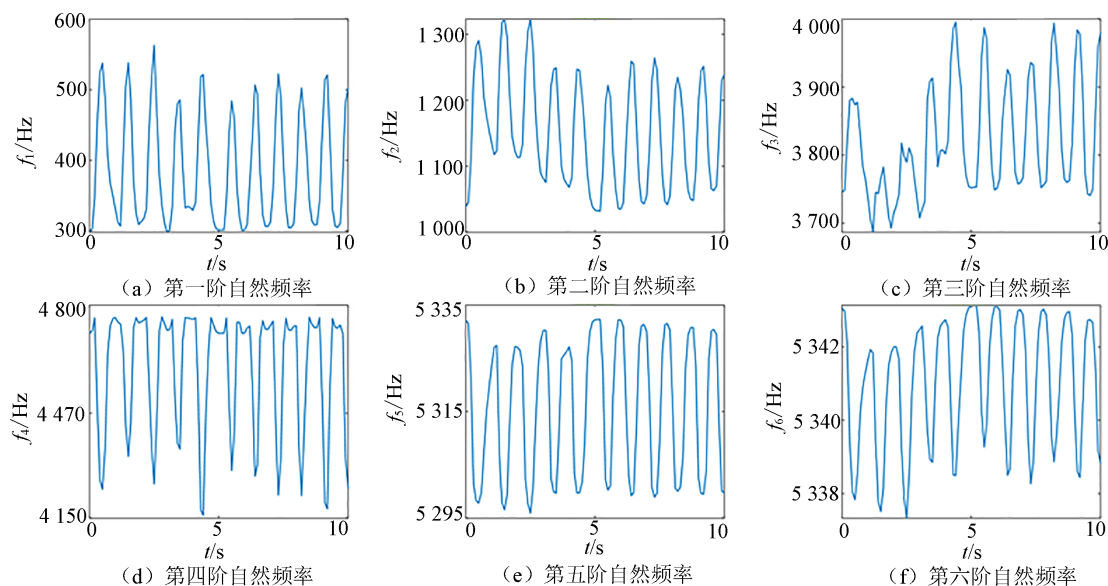


图 7 机构的前六阶自然频率

Fig. 7 First six orders of natural frequencies of the mechanism

外大；自然频率的起伏变化和咀嚼轨迹相一致，表明频率和位姿紧密相关；要使咀嚼系统产生共振，力频率要大于 300 Hz，从而与 f_1 接近，而人的咀嚼频率一般在 3 Hz 以下，所以咀嚼外力极难使机构产生共振破坏。

综上所述，由于仿人咀嚼机器人的每条支链构型相同，线弹性动力学方法在建模中体现出明显的模块化特征，通过变形协调条件联立支链和末端执行器的弹动力学方程，能较为方便地获得通过二阶常微分方程组表示的机构整体的弹性动力学模型。使用 Matlab 软件能够较为便捷地对其开展数值计算，获得机构的弹动力学特性。数值结果表明，咀嚼机器人有较大的刚度和自然频率，即具有较好的弹动力学性能。因此，线弹性动力学方法在解决仿人咀嚼机器人动力学建模和数值计算中表现出较好的实际应用效果。同时，大刚度能确保机构的形变小，而较大的自然频率能够确保较大的控制带宽。

3 结论

为掌握 6RSS 并联仿人咀嚼机器人的弹性动力学性能，在刚性动力学逆解的基础上，本文采用线弹性动力学法，建立了机构的弹性动力学模型，获得用二阶刚性常微分方程组表示的机构弹动力学模型。然后，使用基于梯形法则步长及向后差分算法的数值解法，获得在跟踪真人咀嚼轨迹时

的机构弹性形变和自然频率，主要结论如下。

1) 在真实咀嚼反力作用下，机器人在 6 个运动方向上的最大形变量分别为 1.7×10^{-2} mm、 1.1×10^{-3} mm、 2.8×10^{-2} mm、 $7.1 \times 10^{-6}^\circ$ 、 $4.9 \times 10^{-4}^\circ$ 、 $7.0 \times 10^{-6}^\circ$ ，形变量数值较小。

2) 最小自然频率为 300 Hz，远超人的咀嚼频率，所以咀嚼反力难以引起共振，表明机构具有较好的弹性动力学性能。

本文从弹动力学性能的角度出发，结合前期开展的仿人咀嚼运动跟踪结果^[9]，表明所设计的机构有望用于新食材的测试工作。后续，为更接近真实情况的仿人咀嚼机器人的弹动力学特性，还会考虑将曲柄替换为柔性梁，并开展整条支链都为柔性构件时仿人咀嚼机器人的弹动力学建模和分析。

参考文献

- [1] 张啸峰, 陈勇, 陈建设. 基于口腔咀嚼原理的咀嚼模拟器研究进展[J]. 食品工业科技, 2022, 43(5): 1-12.
ZHANG X F, CHEN Y, CHEN J S. Research progress of masticatory simulator based on the principle of oral mastication[J]. Science and Technology of Food Industry, 2022, 43(5): 1-12.
- [2] CHOW R, MOSTASHIRI N, DHUPIA J S, et al. Simultaneous vision and surface electromyography measurements to evaluate masticatory robot TMJ reaction forces during mastication[J]. IEEE Sensors Journal, 2024, 24(7): 11279-11286.

- [3] CHEN B X, DHUPIA J S, XU W L. A chewing robot to assist quantitative food analysis: kinematics and fuzzy scheduling control[J]. *IEEE / ASME Transactions on Mechatronics*, 2023, 28(5): 2908-2918.
- [4] MOSTASHIRI N, DHUPIA J, VERL A, et al. Optimizing the torque distribution of a redundantly actuated parallel robot to study the temporomandibular reaction forces during food chewing[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2020, 12(5): 51008.
- [5] CHEN B X, DHUPIA J S, MORGENSTERN M P, et al. Development of a biomimetic masticating robot for food texture analysis[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2022, 14(2): 021012.
- [6] WEN H Y, CONG M, XU W L, et al. Optimal design of a linkage-cam mechanism-based redundantly actuated parallel manipulator[J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2021, 16(3): 451-467.
- [7] WEN H Y, ZHU J X, ZHANG H, et al. Development of a masticatory robot using a novel cable-driven linear actuator with bidirectional motion[J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2023, 17(4): 31.
- [8] XU W L, BRONLUND J E. Mastication robots: biological inspiration to implementation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 1-32.
- [9] 程晨, 袁晓静, 阳能军, 等. 6RSS 仿人并联咀嚼机器人的刚性动力学建模分析[J]. *医疗卫生装备*, 2024, 45(3): 16-22.
CHENG C, YUAN X J, YANG N J, et al. Rigid-body inverse dynamics modelling and analysis of 6RSS parallel bio-inspired masticatory robot[J]. *Chinese Medical Equipment Journal*, 2024, 45(3): 16-22.
- [10] ZHANG Q H, ZHANG X M. Dynamic analysis of planar 3-RRR flexible parallel robots under uniform temperature change[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21(1): 81-104.
- [11] WITTEVEEN W, PICHLER F. On the relevance of inertia related terms in the equations of motion of a flexible body in the floating frame of reference formulation[J]. *Multibody Sysemt Dynamics*, 2019, 46: 77-105.
- [12] ALESSANDRO C, ROSARIO S. Elastodynamic optimization of a 3T1R parallel manipulator[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 73: 184-196.
- [13] SONG Y M, DONG G, SUN T, et al. Elastodynamic analysis of a novel 2-DoF rotational parallel mechanism with an articulated travelling platform[J]. *Meccanica*, 2016, 51(7): 1547-1557.
- [14] SUN T, LIAN B B, SONG Y M, et al. Elastodynamic optimization of a 5-DoF parallel kinematic machine considering parameter uncertainty[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 24(1): 315-325.
- [15] WU J, WANG L P, GUAN L W. A study on the effect of structure parameters on the dynamic characteristics of a PRRRP parallel manipulator[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 74(1): 227-235.
- [16] ZHANG X P, MILLS J K, CLEGHORN W L. Coupling characteristics of rigid body motion and elastic deformation of a 3-PRR parallel manipulator with flexible links[J]. *Multibody System Dynamics*, 2009, 21(2): 167-192.
- [17] BRIOT S, KHALIL W. Recursive and symbolic calculation of the elastodynamic model of flexible parallel robots[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2014, 33(3): 469-483.
- [18] SUN T, LIANG D, SONG Y M. Singular-perturbation-based nonlinear hybrid control of redundant parallel robot[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(4): 3326-3336.
- [19] LIANG D, SONG Y M, QI Y, et al. Efficient modeling and integrated control for tracking and vibration of a lightweight parallel manipulator including servo motor dynamics[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 153: 107502.
- [20] MA Y, LIU H T, ZHANG M, et al. Elastodynamic performance evaluation of a 6-DOF hybrid polishing robot based on kinematic modeling and CAE technology[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 176: 104983.
- [21] ZHU W, JIANG M, YANG F F, et al. Modeling of a hexapod piezo-actuated positioning platform[J]. *Multibody System Dynamics*, 2024, 61(1): 19-42.
- [22] STABILE A, YOTOV V V, AGLIETTI G S, et al. Effect of boundary conditions on a high-performance isolation hexapod platform[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 177: 105020.
- [23] YU G, WANG L P, WU J, et al. Milling stability prediction of a hybrid machine tool considering low-frequency dynamic characteristics[J]. *Me-*

- chanical Systems and Signal Processing, 2020, 135: 106364.
- [24] ZBYNĚK Š, KRIVOŠEJ J, VYHLÍDAL T. Three dimensional delayed resonator of Stewart platform type for entire absorption of fully spatial vibration [J]. Journal of Sound and Vibration, 2024, 571: 118154.
- [25] BERENDSEN D, SRIDHAR A, AARTS R. A redundantly actuated 2-DOF 3RRR PKM with ex-
ure joints: less is more[J]. Multibody System Dynamics, 2023, 59: 1-17.
- [26] ZHAO Y J, GAO F, DONG X J, et al. Elastodynamic characteristics comparison of the 8-PSS redundant parallel manipulator and its non-redundant counterpart-the 6-PSS parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45 (2): 291-303.
- (编辑: 刘建民)

通信作者及其研究团队介绍

袁晓静, 男, 教授、博士生导师, 装备管理专家、维修管理专家、法治专家, 陕西省三秦英才特支计划创全国一流团队骨干, 长期从事装备防护与管理保障技术相关的教学科研工作。主持国家和军队课题 20 余项, 获军队科技进步奖一等奖 1 项、二等奖 2 项、三等奖 5 项, 中国发明协会创业奖创新奖二等奖 1 项, 陕西省高等学校科学技术研究优秀成果二等奖 1 项, 应用软件创客大赛三等奖 1 项, 陕西省科技工作者创新创业大赛二等奖 4 项。发表教学科研论文 110 余篇, 其中 SCI、EI 检索 50 余篇, 出版专著 7 部、教材 3 部, 授权国家专利 6 项、软件著作权 21 项。获批军队精品课程 1 门、军队军事职业精品微课 1 门、省一流本科课程 1 门、大学金课 1 门, 指导研究生获得中国兵工学会优秀学位论文 1 篇, 全国数据高峰论坛优秀论文二等奖 1 项, 全国三维数字创新大赛一等奖 1 项、省赛一等奖 1 项, 中国国际“互联网+”大学生创新创业大赛陕西赛区铜奖 1 项, 机械设计创新大赛省级二等奖 1 项。

程晨, 男, 讲师, 主要从事仿生机器人相关研究工作。主持陕西省自然科学基金 1 项。作为第一作者, 出版学术专著 1 部, 发表 SCI 论文 7 篇, 中文核心论文 1 篇, 担任 *Nonlinear Dynamics*、*Mechanism and Machine Theory*、*IEEE Transactions on Industrial Electronics* 等多个 SCI 期刊论文审稿人, 在机器人仿生设计、多刚体动力学逆解高效建模、弹动力学行为分析、运动控制等方面取得多个创新成果。